ZADANIE #69

(5 punktów)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.
a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).
b) Sprawdź, czy ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny.
c) Wyznacz takie n, aby S_n początkowych wyrazów ciągu (a_n) miała wartość najmniejszą.

ROZWIĄZANIE:

a) Korzystając ze wzory na $n - ty$ wyraz ciągu arytmetycznego tworzymy układ i wyliczamy r

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6r = 1 \\ a_{11} = a_1 + 10r = 9 \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze aby skrócić a_1, otrzymujemy:

$$4r = 8 \Rightarrow r = 2$$

Mając r wyznaczamy a_1

$$a_1 + 6 \cdot 2 = 1$$

$$a_1 = 1 - 12 = -11$$

ODPOWIEDŹ: $a_1 = -11, r = 2$

b) Obliczamy a_8

$$a_8 = a_7 + r = 1 + 2 = 3$$

Aby sprawdzić czy ciąg jest geometryczny sprawdzamy prawdziwość zależności na środkowy wyraz ciągu geometrycznego (1, 3, 9).

$$a_n^2 = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$3^2 = 1 \cdot 9$$

Równość jest prawdziwa, zatem dany ciąg jest geometryczny.

ODPOWIEDŹ: *Ciąg jest geometryczny*

Po podstawieniu do wzoru na Sn, otrzymujemy równanie kwadratowe, z ramionami skierowanymi ku górze, najmniejsza wartość jest we współrzędnej wierzchołka paraboli.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{-22 + 2(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2\big(-11 + (n-1)\big)}{2} \cdot n =$$
$$= \big(-11 + (n-1)\big) \cdot n = (-12 + n) \cdot n = n^2 - 12n$$

Otrzymaną funkcja jest funkcją kwadratową, ramiona ma skierowane ku górze, najmniejsza wartość jest w wierzchołku paraboli o współrzędnych (p, q). Obliczamy wartość, współrzędnej p.

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$p = \frac{-(-12)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ODPOWIEDŹ: $n = 6$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl