ZADANIE #6

(4 punkty)

Dany jest wielomian $\boldsymbol{W(x) = 2x^3 + ax^2 - 14x + b}$.

a) Dla $\boldsymbol{a = 0}$ i $\boldsymbol{b = 0}$ otrzymujemy wielomian $\boldsymbol{W(x) = 2x^3 - 14x}$. Rozwiąż równanie $\boldsymbol{2x^3 - 14x = 0}$.

b) Dobierz wartości $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ tak, aby wielomian $\boldsymbol{W(x)}$ podzielny jednocześnie przez $\boldsymbol{x - 2}$ oraz $\boldsymbol{x + 3}$.

ROZWIĄZANIE:

a) Wyciągamy $\boldsymbol{2x}$ przed nawias:

$$2x^3 - 14x = 0$$

$$2x(x^2 - 7) = 0$$

Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia (różnica kwadratów)

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$2x\left(x^2 - \sqrt{7^2}\right) = 0$$

$$2x(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$$

Aby iloczyn dwóch lub większej ilości liczb wyniósł zero przynajmniej jedna z tych liczb musi być zerem.

$2x = 0 \qquad (x - \sqrt{7}) = 0 \qquad (x + \sqrt{7}) = 0$

Miejscami zerowymi są odpowiednio:

$x = 0 \qquad x = \sqrt{7} \qquad x = -\sqrt{7}$

ODPOWIEDŹ: $\boldsymbol{x = 0, \sqrt{7}, -\sqrt{7}}$

b) Na mocy twierdzenia Bézout jeśli wielomian $\boldsymbol{W(p) = 0}$, to wielomian ten jest podzielny przez dwumian $\boldsymbol{x - p}$. W ten sposób tworzymy układ równań:

$$W(2) = 16 + 4a - 28 + b = 0$$

$$W(-3) = -54 + 9a + 42 + b = 0$$

Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$\begin{cases} 4a + b = 12 \\ 9a + b = 12 \end{cases}$$

Odejmując równania od siebie otrzymujemy:

$$5a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Jeśli $\boldsymbol{a = 0}$ to:

$$b = 12$$

ODPOWIEDŹ: $\boldsymbol{a = 0, b = 12}$