Egzamin Maturalny

POZIOM PODSTAWOWY

5 Maj 2011

170 minut

ZADANIA ZAMKNIĘTE

ZADANIE #1

(1 punkt)

Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.

A) $|x+1|>5$ B) $|x-1|<2$ C) $\left|x+\frac{2}{3}\right|\leq 4$ D) $\left|x-\frac{1}{3}\right|\geq 3$

ROZWIĄZANIE:

Tylko jedno równanie spełnione jest dla π.

$$\left|3{,}14+\frac{2}{3}\right|\approx|3{,}14+0{,}66|\approx 3{,}8$$

Sprawdzamy czy nierówność jest prawdziwa.

$$3{,}8<4$$

ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #2

(1 punkt)

Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 $zł$. Rower kosztuje:

A) $1701zł$ B) $2100zł$ C) $1890zł$ D) $2091zł$

ROZWIĄZANIE:

Jeśli jako x oznaczymy cenę wyjściową roweru to otrzymujemy:

$$0{,}09x = 189$$

$$x = \frac{189}{0{,}09} = 2100$$

ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #3

(1 punkt)

Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:
A) $5a^2(1 - 10b + 3)$ B) $5a(a - 2b + 3)$ C) $5a(a - 10b + 15)$ D) $5(a - 2b + 3)$

ROZWIĄZANIE:

W danym wyrażeniu $5a^2 - 10ab + 15a$ wyciągamy $5a$ przed nawias. W ten sposób otrzymujemy:

$$5a(a - 2b + 3)$$

ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #4

(1 punkt)

Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A) $a = -1$ B) $a = 0$ C) $a = 2$ D) $a = 3$

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli układ ma mieć nieskończenie wiele rozwiązań to jedno równanie musi być wielokrotnością drugiego.

$$\frac{4x}{6x} = \frac{2y}{ay} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2y}{ay} = \frac{2}{3}$$

$$6y = 2ay \ /: 2y$$

$$a = 3$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #5

(1 punkt)

Rozwiązanie równania $x(x+3) - 49 = x(x-4)$ należy do przedziału

A) $(-\infty, 3)$ B) $(10, +\infty)$ C) $(-5, -1)$ D) $(2, +\infty)$

ROZWIĄZANIE:

Przekształcamy równanie i wyliczamy x.

$$x^2 + 3x - 49 = x^2 - 4x$$

$$7x = 49 \ /: 7$$

$$x = 7$$

Liczba ta należy do przedziału $(2, +\infty)$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #6

(1 punkt)

Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności

$\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2

ROZWIĄZANIE:

Wymnażamy obustronnie przez 24 aby pozbyć się ułamków.

$$\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12} \quad /\cdot 24$$

$$9+4x<10x$$

$$9<6x \quad /:6$$

$$\frac{3}{2}<x$$

Najmniejsza liczba całkowita spełniająca tę nierówność to 2.

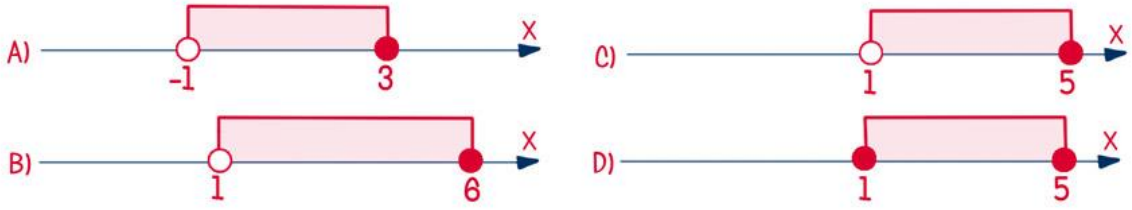
ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #7

(1 punkt)

Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0$ i $x>1$



ROZWIĄZANIE:

Rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$3(x-1)(x-5) \leq 0$$

Aby iloczyn mógł równać się 0 to jedna z liczb musi być zerem, przyrównujemy oba nawiasy do zera otrzymując:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

Wykresem funkcji jest parabola, ramionami skierowana ku górze ponieważ współczynnik kierunkowej $a=3$. Nas interesuje to co jest na minusie, ponieważ równanie ma być mniejsze od zera, dodatkowo równanie może być równe zero więc przedziały są zamknięte. W tym przypadku jest to przedział $\langle 1,5 \rangle$. Drugi warunek to $x>1$, stąd nasz przedział przedstawia się następująco $x \in (1,5\rangle$.

ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #8

(1 punkt)

Wyrażenie $log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

A) $x \leq \frac{1}{2}$ B) $x > \frac{1}{2}$ C) $x \leq 0$ D) $x > 0$

ROZWIĄZANIE:

Wyrażenie logarytmowane musi być większe od zera, a więc:

$$2x-1>0$$

$$2x>1 \quad /:2$$

$$x > \frac{1}{2}$$

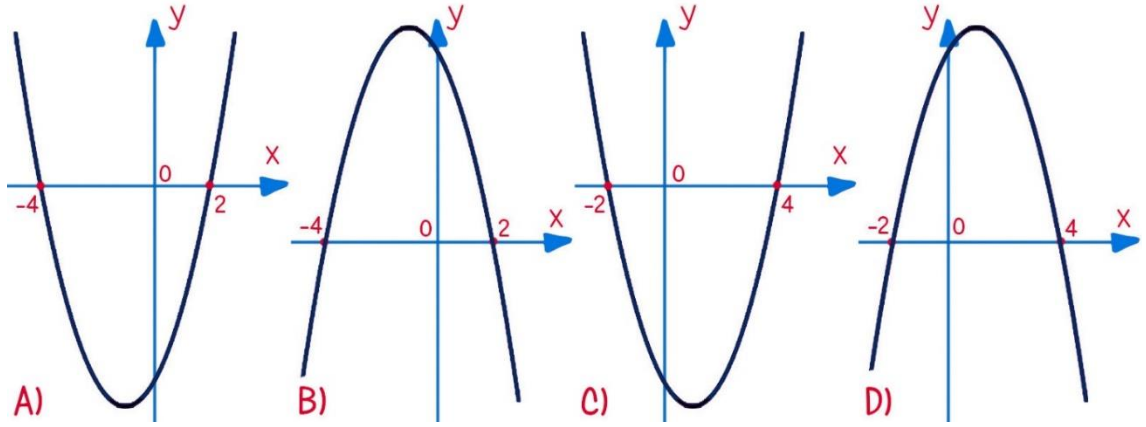
ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #9

(1 punkt)

Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określne dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.



ROZWIĄZANIE:

Z treści zadania wiemy, że:

$$h(x) = f(x) \cdot h(x)$$

Podstawiając dane otrzymujemy:

$$h(x) = (x - 2)(x + 4)$$

Jest to postać iloczynowa funkcji kwadratowej o współczynniku $a > 0$, więc ramiona paraboli będą skierowane ku górze, dodatkowo wiemy, że funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe w punktach $-4,\ 2$

ODPOWIEDŹ: A

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #10

(1 punkt)

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A) $-2\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE:

Liczymy $f(x) = 0$

$$0 = -\sqrt{2}x + 4$$

$$\sqrt{2}x = 4 \ \ /:\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #11

(1 punkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

B) $a_1 = \frac{2}{3}$ B) $a_1 = \frac{4}{9}$ C) $a_1 = \frac{3}{2}$ D) $a_1 = \frac{9}{4}$

ROZWIĄZANIE:

Z podanych dwóch kolejnych wyrazów wyliczamy iloraz ciągu.

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = a_1 q^2 \Rightarrow a_1 = \frac{a_3}{q^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #12

(1 punkt)

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A) $a_4 + a_7 = a_{10}$ B) $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ C) $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ D) $a_5 + a_7 = 2a_8$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy z wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wybieramy najprostsze równanie ciągu arytmetycznego np. $a_n = n$ i sprawdzamy, które równanie będzie prawdziwe:

$$a_2 + a_9 = 2 + 9 = 3 + 8 = a_3 + a_8$$

ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #13

(1 punkt)

Kąt α jest ostry i $cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

B) $sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{5}$ B) $sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{5}{12}$

C) $sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$ D) $sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy ze wzoru na jedynkę trygonometryczną, aby obliczyć $sin\alpha$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{69}} = \frac{12}{13}$$

Mając wartość $sin\alpha$ bez problemu obliczymy $tg\alpha$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$$

ODPOWIEDŹ: A

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #14

(1 punkt)

Wartość wyrażenia $\frac{sin^2 38° + cos^2 38° - 1}{sin^2 52° + cos^2 52° + 1}$ jest równa

$A)\ \frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $-\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy ze wzoru na jedynkę trygonometryczną:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Stosując go otrzymujemy:

$$\frac{sin^2 38° + cos^2 38° - 1}{sin^2 52° + cos^2 52° + 1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

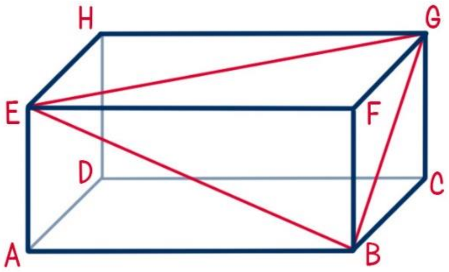
ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #15

(1 punkt)

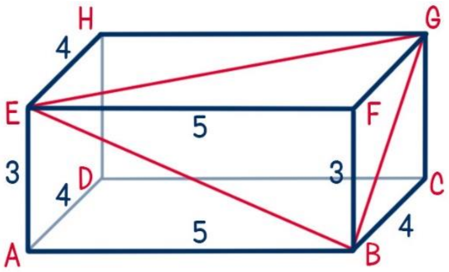
W prostopadłościanie mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



$A)\ AB$ B) BG C) GE D) EB

ROZWIĄZANIE:

Nanosimy dane na rysunek.



Brakujące długości liczymy korzystając z Twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$BG^2 = BF^2 + FG^2 = 9 + 16 = 25$$

$$GE^2 = EF^2 + FG^2 = 25 + 16 = 41$$

$$EB^2 = EF^2 + FB^2 = 25 + 9 = 34$$

W powyższych równaniach obliczone mamy kwadraty długości poszczególnych odpowiedzi, ale na ich podstawie możemy jednoznacznie wskazać, że najdłuższy z nich jest bok : GE

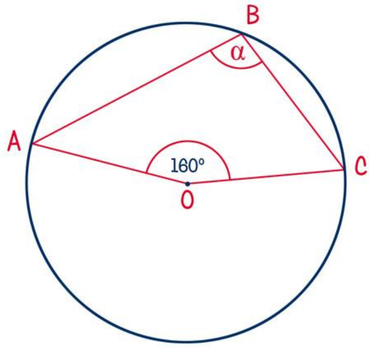
ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #16

(1 punkt)

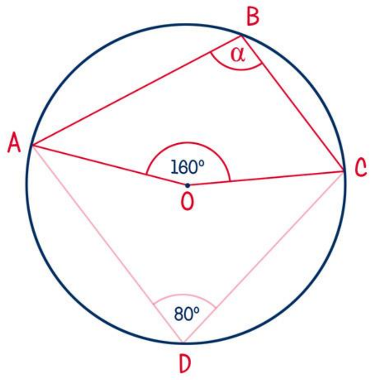
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



$A)$ $80°$ B) $100°$ C) $110°$ D) $120°$

ROZWIĄZANIE:

Zaznaczamy punkt D na łuku AC



Na mocy Twierdzenia o kacie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku wiemy, że $\measuredangle ADC = \frac{1}{2}\measuredangle AOC = 80°$.
Wiemy również, że sumy katów przeciwległych w czworokącie wpisanym w okrąg mają zawsze 180°

$$\alpha + 80° = 180°$$

$$\alpha = 180° - 80° = 100°$$

ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #17

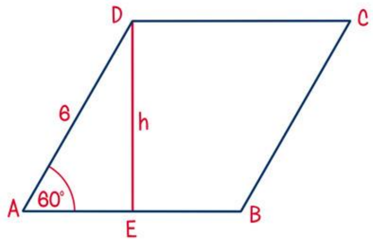
(1 punkt)

Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

$A)\ 3\sqrt{3}$ B) 3 C) $6\sqrt{3}$ D) 6

ROZWIĄZANIE:

Rysunek pomocniczy



Z trójkąta prostokątnego AED mamy:

$$\frac{6}{h} = sin60^\circ$$

$$h = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

ODPOWIEDŹ: A

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #118

(1 punkt)

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2,1)$.

$A)\ y = -2x + 3$ B) $y = 2x + 1$ C) $y = 2x + 5$ D) $y = -x + 1$

ROZWIĄZANIE:

Prosta l będzie prostopadła do prostej k, tylko wówczas gdy współczynniki kierunkowe obu prostych będą takie same. Warunek ten spełniają tylko dwie odpowiedzi: $y = 2x + 1$ i $y = 2x + 5$.

Do obu prostych podstawiamy współrzędne punktu D i sprawdzamy dla której z nich równość będzie spełniona.

Sprawdzamy warunek dla $y = (2x + 1)$, $D = (-2,1)$:

$$1 = 2 \cdot (-2) + 1 \neq -3$$

Powyższy warunek nie jest spełniony, sprawdzamy dla drugiego przypadku $y = (2x + 5)$, $D = (-2,1)$:

$$1 = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

Warunek ten jest spełniony.

ODPOWIEDŹ: C

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #19

(1 punkt)

Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu.

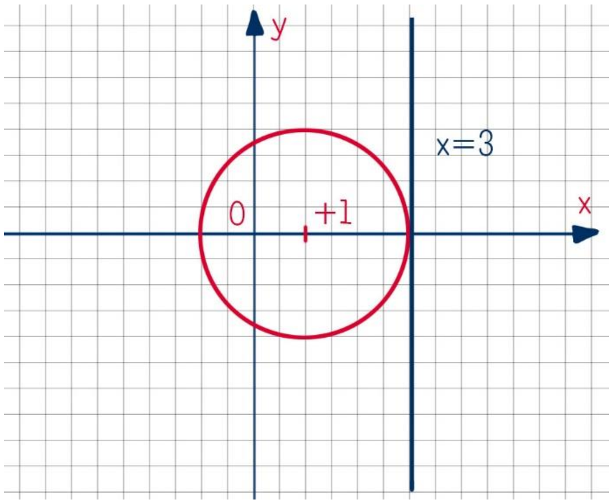
$A)\ x = 1$ B) $x = 3$ C) $y = 0$ D) $y = 4$

ROZWIĄZANIE:

Porządkujemy równanie okręgu, które po przekształceniu przedstawia się następująco:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2^2$$

Na podstawie równania okręgu wiemy, że mamy do czynienia z okręgiem o środku $(1,0)$ i promieniu 2. Rysujemy okrąg na układzie współrzędnych.



Jedyna prosta, która jest styczna do okręgu to: $x = 3$.

ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #20

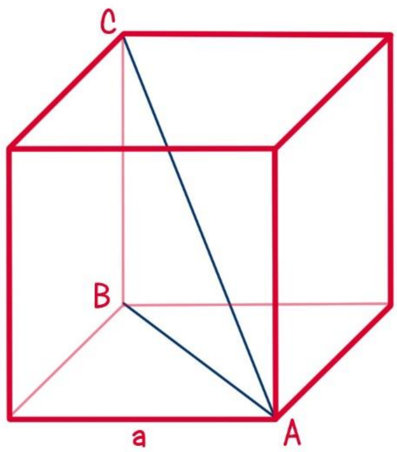
(1 punkt)

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

$A)\sqrt{6}$ B) 3 C) 9 D) $3\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE:

Jeśli narysujemy rysunek poglądowy, na którym krawędź oznaczymy jako a to jego pole powierzchni całkowitej to $6a^2$.



$$6a^2 = 54 \ /:6$$

$$a^2 = \frac{54}{6} = 9 \Rightarrow a = 3$$

Przekątna podstawy jest zatem równa:

$$AB = a\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$$

a przekątna sześcianu:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{18 + 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #122

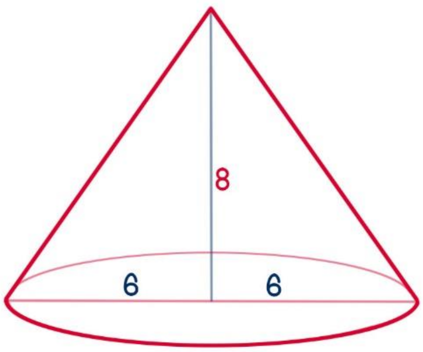
(1 punkt)

Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

$A)$ 124π B) 96π C) 64π D) 32π

ROZWIĄZANIE:

Zaczynamy od rysunku



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \ 6^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 36 \cdot 8 = \pi \cdot 12 \cdot 8 = 96\pi$$

ODPOWIEDŹ: B

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #22

(1 punkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

$A)\ \frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$

ROZWIĄZANIE:

Zdarzenie elementarne to dwukrotny rzut kostką, zbiór wszystkich zdarzeń wynosi:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

Zdarzenia sprzyjające A w tym przypadku to: (2,1) i (1,2).

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #23

(1 punkt)

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?" Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7

ROZWIĄZANIE:

Liczymy średnią ważoną. Wszystkich uczniów jest $6+12+2=20$, więc:

$$4=\frac{3\cdot 6+4\cdot 12+x\cdot 2}{20}=\frac{18+48+2x}{20}=\frac{9+24+x}{10}\quad /\cdot 10$$

$$40=33+x$$

$$\mathrm{x}=7$$

ODPOWIEDŹ: D

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #24

(2 punkty)

Rozwiąż nierówność $3x^2-10x+3\leq 0$.

ROZWIĄZANIE:

Obliczamy miejsca zerowe.

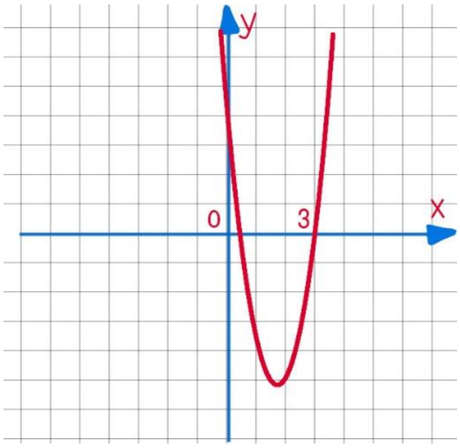
$$3x^2-10x+3\leq 0$$

$$\Delta=(-10)^2-4\cdot 3\cdot 3=100-36=64=8^2$$

$$x_1=\frac{-(-10)-8}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-(-10)+8}{2\cdot 3}=\frac{18}{6}=3$$

Wykresem nierówności jest parabola o ramionach skierowanych w górę i miejscach zerowych $\frac{1}{3}$ i 3.



Rozwiązaniem nierówności jest przedział: $\langle \frac{1}{3}, 3\rangle$

ODPOWIEDŹ: $\langle \frac{1}{3}, 3\rangle$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #25

(2 punkty)

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

ROZWIĄZANIE:

Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy do obliczenia ab.

$$a + b = 1 = 1^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 7 + 2ab$$

$$1 = 7 + 2ab$$

$$2ab = -6 \Rightarrow ab = -3$$

Następnie podnosimy równość $a^2 + b^2 = 7$ stronami do kwadratu.

$$7^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 = a^4 + 2(ab)^2 + b^4 = 49$$

$$a^4 + b^4 + 2(ab)^2 = 49$$

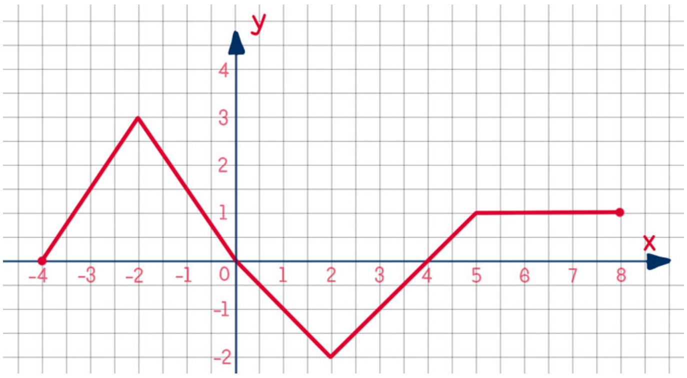
$$a^4 + b^4 = 49 - 2(ab)^2 = 49 - 2 \cdot (-3)^2 = 49 - 2 \cdot 9 = 49 - 18 = 31$$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #26

(2 punkty)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Odczytaj z wykresu i zapisz:
a) zbiór wartości funkcji f,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

ROZWIĄZANIE:

a) Odczytujemy z wykresu: jest to przedział $\langle -2,3\rangle$.

ODPOWIEDŹ: $\langle -2,3\rangle$

b) Odczytujemy z wykresu: jest to przedział $\langle -2,2\rangle$.

ODPOWIEDŹ: $\langle -2,2\rangle$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #27

(2 punkty)

Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$. Oblicz x i y.

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy z wzoru na środkowy wyraz ciągu arytmetycznego.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$y = \frac{x+19}{2} \;/\cdot 2$$

$$2y = x + 19$$

Tworzymy układ równań, z równaniem z treści zadania.

$$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami:

$$2y + x + y = x + 19 + 8$$

$$3y + x = x + 27$$

$$3y = 27 \;/\cdot 3$$

$$y = 9$$

$$x + y = 8$$

$$x + 9 = 8 \Rightarrow x = -1$$

ODPOWIEDŹ: $x = -1, y = 9$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #28

(2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}=2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha cos\alpha$.

ROZWIĄZANIE:

Przekształcamy równanie do postaci $sin\alpha cos\alpha$.

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}=2$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika i dodajemy:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\cdot\frac{sin\alpha}{sin\alpha}+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\cdot\frac{cos\alpha}{cos\alpha}=2$$

$$\frac{sin\alpha^2}{cos\alpha sin\alpha}+\frac{cos^2}{sin\alpha cos\alpha}=2$$

Zapisujemy pod jedną kreską ułamkową:

$$\frac{sin\alpha^2+cos\alpha^2}{sin\alpha cos\alpha}=2$$

Zamieniamy licznik zgodnie z wzorem na jedynkę trygonometryczną:

$$\frac{1}{sin\alpha cos\alpha}=2$$

Odwracamy równanie (do góry nogami) lub inaczej potęgujemy obustronnie przez -1

$$\frac{1}{sin\alpha cos\alpha}=\frac{2}{1}$$

$$sin\alpha cos\alpha=\frac{1}{2}$$

ODPOWIEDŹ: $\frac{1}{2}$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

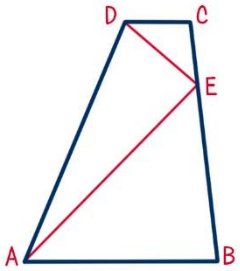
ZADANIE #29

(2 punkty)

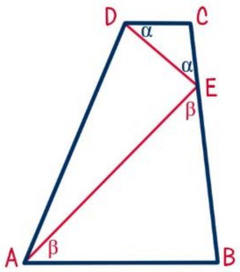
Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

ROZWIĄZANIE:

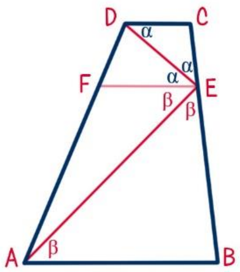
Rozpoczynamy od rysunku pomocniczego.



Wiemy, że trójkąty DCE i EBA są równoramienne. Możemy zatem oznaczyć odpowiednie kąty jako α i β.



Dorysowujemy prostą EF równoległą do AB i CD. Wówczas widać, że $\measuredangle FED$ jest równy $\measuredangle EDC$ oraz $\measuredangle FEA$ jest równy $\measuredangle EAB$.



Prosta BC ma 180°. Więc:

$$2\alpha + 2\beta = 180° \ /:2$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #30

(2 punkty)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,\dots,7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE:

Zdarzenie elementarne to wylosowanie dwóch licz z 7, obliczamy ile jest wszystkich możliwości:

$$|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$$

Teraz wypisujemy wszystkie zdarzenia sprzyjające, czyli suma wylosowanych oczek musi być podzielna przez 3. Pod uwagę bierzemy tylko te pary, których suma oczek wynosi: 3, 6, 9 lub 12.

$$\begin{gathered}(1,2),(2,1),(1,5),(2,4),\\(3,3),(4,2),(5,1),(2,7),\\(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),\\(7,2),(5,7),(6,6),(7,5)\end{gathered}$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe:

$$P = \frac{16}{49}$$

ODPOWIEDŹ: $P = \frac{16}{49}$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

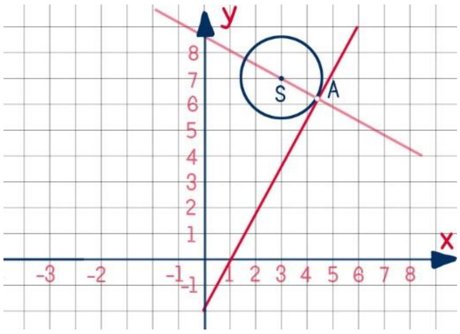
ZADANIE #31

(4 punkty)

Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

ROZWIĄZANIE:

Piszemy równanie prostej przechodzącą przez środek okręgu i prostopadłej do prostej będącej styczną do okręgu.



Oznaczamy punkt styczności jako A, wówczas prosta SA i prosta $y = 2x - 3$ są prostopadłe. Stąd wiemy, że prosta SA ma postać $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Współczynnik b obliczamy podstawiając do równania współrzędne punktu S.

$$S = (3,7)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$7 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$$

$$7 = -\frac{3}{2} + b$$

$$b = 7 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$$

Rozwiązując układ równań składający się z prostej $y = 2x - 3$ oraz prostej SA wyznaczamy współrzędne punktu A.

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$$

Przyrównujemy oba równania do siebie i wymnażamy przez 2, aby pozbyć się ułamków.

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \quad /\cdot 2$$

$$4x - 6 = -x + 17$$

$$5x = 23 \quad /:5$$

$$x = \frac{23}{5} = 4{,}6$$

Obliczamy y.

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2 \cdot 4{,}6 - 3 = 9{,}2 - 3 = 6{,}2$$

ODPOWIEDŹ: $A = (4{,}6; 6{,}2)$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #32

(5 punktów)

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

ROZWIĄZANIE:

Zmienną obrazującą liczbę dni oznaczmy jako d, a zmienną obrazującą kilometry jako k. Z treści zadania wiemy, że:

$$\begin{cases} d \cdot k = 12 \\ (d+3) \cdot (k-12) = 112 \end{cases}$$

Wyznaczamy z pierwszego równania d i podstawiamy do drugiego równania.

$$d \cdot k = 112 \ /: k$$

$$d = \frac{112}{k}$$

$$\left(\frac{112}{k} + 3\right)(k - 12) = 112$$

Wymnażamy przez k aby pozbyć się ułamka, a następnie nawiasy przez siebie.

$$\left(\frac{112}{k} + 3\right)(k - 12) = 112 \ /\cdot k$$

$$(112 + 3k)(k - 12) = 112k$$

Porządkujemy nasze równanie, a następnie dzielimy przez 3, aby pozbyć się dużych liczb i ułatwić dalsze obliczenia.

$$112k - 1344 + 3k^2 - 36k - 112k = 0$$

$$3k^2 - 36k - 1344 = 0 \ /: 3$$

$$k^2 - 12k - 448 = 0$$

Otrzymaliśmy typowe równanie kwadratowe, które liczymy przy pomocy wzoru $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1344)$$

$$\Delta = 144 + 1792 = 1936 = 44^2$$

$$k_1 = \frac{12 - 44}{2} = -16 < 0$$

$$k_2 = \frac{12 + 44}{2} = 28$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy ponieważ jest ujemne, a więc nasze szukane $k = 28$.

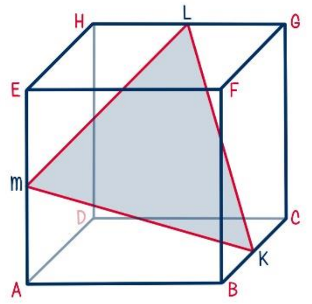
ODPOWIEDŹ: $22km$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl

ZADANIE #33

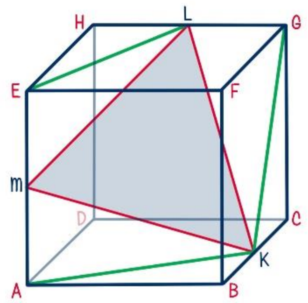
(4 punkty)

Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC , GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM.



ROZWIĄZANIE:

Dorysowujemy odcinki AK, KG i EL.



Trzy otrzymane trójkąty AKM, GKL i ELM są przystające, a więc nasz szukany trójkąt KML jest równoboczny, obliczamy długość boku tego trójkąta. Najpierw z Pitagorasa liczymy długość boku AK.

$$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Znając długość boku AK liczymy z Pitagorasa długość MK.

$$MK = \sqrt{AK^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Podstawiamy do wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P_{KLM} = \frac{MK^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ODPOWIEDŹ: $P_{KLM} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Zadanie pochodzi ze strony: bezkalkulatora.pl